Теория:

В этом разделе рассмотрим логарифмические урвнения, которые можно заменой свести к алгебраическим уравнениям.

Пример. $\log_5^2 x + 0,5\log_5 x^2 = 6$.

Преобразуем к виду $\log_5^2 x + \log_5 x = 6$ и сделаем замену $\log_5 x = t$. Приходим к уравнению $t^2 + t = 6$, которое имеет корни $t = 2$, $t = -3$. Возвращаясь к замене, получим два уравнения: $\log_5 x = 2$ и $\log_5 x = -3$. Ответ: $x = 25,\ x = \frac{1}{125}$.

Некоторые уравнения требуют более тщательной подготовки к тому, чтобы произвести замену.

Пример. $\log_{2x} x^2 - \log_{4x} x = 0$.

ОДЗ: $x > 0,\ x \neq \frac{1}{2},\ x \neq \frac{1}{4}$.

$2\log_{2x} x - \log_{4x} x = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{\log_x 2x} - \frac{1}{\log_x 4x} = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{\log_x 2+1} - \frac{1}{2\log_x 2+1} = 0$.

Замена $\log_x 2 = t$ сводит логарифмическое уравнение к дробно-рациональному $\frac{2}{t+1} - \frac{1}{2t+1} = 0$, которое имеет корень $t = -\frac{1}{3}$.

$\log_x 2 = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow x^{-\frac{1}{3}} = 2 \Leftrightarrow (x^{-\frac{1}{3}})^{-3} = 2^{-3} \Leftrightarrow x = 2^{-3} = \frac{1}{8}$.

Ответ: $x = \frac{1}{8}$.

Теперь приведем пример, когда нужно быть очень аккуратным при преобразовании логарифмов.

Пример. $\frac{2}{\sqrt{3}\log_2\sqrt{x^2}} - \frac{1}{\sqrt{\log_2(-x)}} = 0$.

Обратим внимание на два фрагмента в уравнении: $\log_2\sqrt{x^2}$ и $\log_2(-x)$. Очевидно, что нужно будет делать замену $\log_2(-x) = t$, для этого преобразуем $\log_2\sqrt{x^2} = \log_2|x| = \log_2(-x)$. Последнее равенство имеет место потому, что $\log_2(-x)$ определен при $x < 0$. После замены получаем уравнение $\frac{2}{\sqrt{3}t} - \frac{1}{\sqrt{t}} = 0$. Корень $t = \frac{4}{3}$.

Вернемся к замене $\log_2(-x) = \frac{4}{3}$. Ответ:$x = -2^{\frac{4}{3}}$.