Теория:

Уравнения данного типа путем элементарных преобразований сводятся к следующему виду: $\log_a f(x) = \log_a g(x)$. Поскольку логарифмы с одним основанием равны только, когда равны их аргументы, мы можем перейти к уравнению $f(x) = g(x)$. Однако, ключевой проблемой этих уравнений является возможность появления посторонних корней. Поэтому с самого начала нужно выписывать ОДЗ уравнения и впоследствии осуществлять проверку корней.

Пример. $\log_4(x+3) + \log_4(x+15) = 3$.

Начнем с того, что выпишем ОДЗ: $\begin{cases} x+3>0 \\ x+15>0 \end{cases}$

Левую часть "склеим" в один логарифм, а число из правой части представим в виде логарифма по основанию 4.

$\log_4(x+3)(x+15) = \log_4 4^3 \Leftrightarrow x^2+18x+45=64$.

Корнями квадратного уравнения будут: $x=-19,\ x=1$. Легко проверить, что только $x=1$ подходит в ОДЗ. Ответ: $x=1$.

Пример. $2\log_{27} 3x + \log_{27}(x^2-4x+4) = \frac{2}{3}$.

ОДЗ этого уравнения: $x \in (0;2) \cup (2;+\infty)$.

Заметим, что второй логарифм в левой части можно преобразовать: $\log_{27}(x^2-4x+4) = \log_{27}(x-2)^2 = 2\log_{27}|x-2|$. Обратите внимание, если не поставить модуль, то будет ошибка, которая может привести к потере корней. Ведь $\log_{27}(x-2)^2$ определен при $x \neq 2$ и если просто "снять" квадрат, то $2\log_{27}(x-2)$ сужает ОДЗ до $x>2$.

Разделим обе части уравнения на 2, преобразуем левую часть уравнения, используя свойства логарифма, а правую часть представим в виде логарифма по основанию 27.

$\log_{27}(3x)|x-2| = \log_{27} 27^{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow \log_{27}(3x)|x-2| = \log_{27} 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x|x-2| = 1$.

Последнее уравнение имеет корни: $x=1, x=1+\sqrt{2}$. Оба корня подходят в ОДЗ. Ответ:$x=1, x=1+\sqrt{2}$.