Теория:

Пример. $\sqrt{x+1} \le \sqrt{8x+1} - \sqrt{2x+3}$.

Преобразуем неравенство так, чтобы обе его части были неотрицательными $\sqrt{x+1} + \sqrt{2x+3} \le \sqrt{8x+1}$. Теперь запишем ОДЗ неравенства $\begin{cases} x+1 \ge 0, \\ 8x+1 \ge 0, \\ 2x+3 \ge 0. \end{cases} \Rightarrow\ x \in [-\frac{1}{8}; +\infty]$.

Можем с чистой совестью возводить обе части неравенства в квадрат:

$x + 1 + 2\sqrt{(x+1)(2x+3)} + 2x + 3 \le 8x + 1;$

$\sqrt{2x^2 + 5x + 3} \le \frac{5x-3}{2}$.

Обратим внимание, что подкоренное выражение неотрицательно на ОДЗ, однако, правая часть неравенства требует наложить еще одно условие: $\frac{5x-3}{2} \ge 0$. После этого, можем возвести обе части в квадрат и получим неравенство: $2x^2+5x+3 \le \frac{(5x-3)^2}{4}$, которое имеет решение $x \in (-\infty; -\frac{1}{17}] \cup [3; +\infty)$. Остается найти пересечение этого множества с ОДЗ и множеством, которое определяется появившимся дополнительным условием $\frac{5x-3}{2} \ge 0$.
Ответ: $x \in [3; +\infty)$.

Пример. $\sqrt{x-2} + \sqrt{2x+5} > 3$.

ОДЗ $\begin{cases} x-2 \ge 0, \\ 2x+5 \ge 0. \end{cases} \Rightarrow\ x \in [2; +\infty]$. После возведения обеих частей в квадрат, получим неравенство $\sqrt{2x^2 + x - 10} > 3 - \frac{3}{2}x$.
С учетом ОДЗ, это неравенство эквивалентно совокупности:

$$\left[\begin{array}{l} 3 - \frac{3}{2}x < 0, \\ \begin{cases} 3 - \frac{3}{2}x \ge 0, \\ 2x^2 + x - 10 > (3 - \frac{3}{2}x)^2 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow x > 2.$$

Полученное множество остается пересечь с ОДЗ. Ответ: $x \in (2; +\infty)$.