Теория:

Простейшим для иррациональных систем является случай, когда заменой иррациональную систему можно привести к рациональной.

Пример. $\begin{cases} \sqrt[4]{x+y} - \sqrt[4]{x-y} = 2, \\ \sqrt{x+y} - \sqrt{x-y} = 8, \end{cases}$

Сделаем замену $\sqrt[4]{x+y} = u,\ \sqrt[4]{x-y} = v$.

Система принимает вид: $\begin{cases} u - v = 2, \\ u^2 - v^2 = 8, \end{cases}$ и имеет единственное решение $u = 3,\ v = 1$. Возвращаясь к замене, получим:

$\begin{cases} \sqrt[4]{x+y} = 3, \\ \sqrt[4]{x-y} = 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 81, \\ x - y = 1, \end{cases}$ Ответ: (41; 40)

Следующий тип - когда линейное уравнение в системе добывается возведением в квадрат одного или нескольких уравнений системы. Как мы уже знаем, возведение в квадрат всегда связано с опасностью появления посторонних решений, поэтому в конце нужно делать проверку.

Пример. $\begin{cases} \sqrt{3x - y + 3} = 2, \\ \sqrt{x + 2y + 4} = 4 - x; \end{cases}$ Возводя первое и второе уравнения в квадрат, приходим к системе: $\begin{cases} 3x - y + 3 = 4, \\ x + 2y + 4 = (4 - x)^2; \end{cases}$ которая имеет решения $(1; 2),\ (14; 41)$.

Подстановкой в изначальную систему убеждаемся, что решение $(14; 41)$ постороннее. Ответ: (1; 2).

Следующий пример иррациональной системы демонстрирует скрытую опасность, о которой многие забывают или вообще не знают.

Пример. $\begin{cases} x + y - \sqrt{\frac{x+y}{x-y}} = \frac{6}{x-y}, \\ x^2 + y^2 = 41. \end{cases}$ Легко заметить, что ни возведение в квадрат, ни замену непосредственно применить нельзя. Но если обе части первого уравнения умножить на $x - y \neq 0$, то получим: $x^2 - y^2 - (x-y)\sqrt{\frac{x+y}{x-y}} = 6$. Именно в этот момент, мы замечаем, что нужно внести множитель $x - y$ под корень, что даст возможность сделать замену. И именно тут, допускают ошибку, которая приводит к потере решений. Кроме того приобретаются посторонние решения, которые, правда, в отличие от потерянных легко отсеять проверкой.

Правильно - рассмотреть два случая:
$\begin{cases} x-y>0, \\ x^2-y^2-\sqrt{x^2-y^2}=6 \end{cases}$ и $\begin{cases} x-y<0, \\ x^2-y^2+\sqrt{x^2-y^2}=6; \end{cases}$
Тогда в первом случае замена $\sqrt{x^2-y^2}=t$ приведет нас к уравнению $t^2-t-6=0$ с корнями $t_1=3,\ t_2=-2$. Возвращаясь к замене, получим: $\sqrt{x^2-y^2}=3$ или $\sqrt{x^2-y^2}=-2$. Второе равенство не возможно, а из первого: $x^2-y^2=9$. Объединяя это уравнение со вторым уравнение системы, получим: $\begin{cases} x^2-y^2=9, \\ x^2+y^2=41; \end{cases}$
Которое решается методом сложения и имеет решения: $(5;4),(-5;4),(5;-4),(-5;-4)$. Условие $x>y$ отсеивает два решения и оставляет $(5;4),(5;-4)$.
Второй случай приведет нас к уравнению $t^2+t-6=0$ с корнями $t_1=-3,\ t_2=2$. В итоге приходим к системе $\begin{cases} x^2-y^2=4 \\ x^2+y^2=41; \end{cases}$ с решениями $(\sqrt{\frac{45}{2}};\sqrt{\frac{37}{2}}),(\sqrt{\frac{45}{2}};-\sqrt{\frac{37}{2}}),(-\sqrt{\frac{45}{2}};\sqrt{\frac{37}{2}}),(-\sqrt{\frac{45}{2}};-\sqrt{\frac{37}{2}})$.
Условие $x<y$ отсеивает два решения и оставляет решения $(-\sqrt{\frac{45}{2}};\sqrt{\frac{37}{2}}),(-\sqrt{\frac{45}{2}};-\sqrt{\frac{37}{2}})$.
Ответ:$(5;4),(5;-4),(-\sqrt{\frac{45}{2}};\sqrt{\frac{37}{2}}),(-\sqrt{\frac{45}{2}};-\sqrt{\frac{37}{2}})$.